Synthèse mathématiques 3è année générale

Voici ***une synthèse*** des chapitres vus de janvier au mois de mars au cours de mathématiques.

Dans le PDF suivant, vous retrouverez des **exercices récapitulatifs**. Ceux-ci ne seront **pas cotés** mais ne sont **pas à prendre à la légère** (il en va de même pour les autres cours).

Vu la durée du confinement, il est important de **ne pas perdre le rythme scolaire** !!

Les synthèses portent sur les chapitres suivants :

- Chapitre 6 : Factorisation
- Chapitre 7 : Les radicaux
- Chapitre 8 : Pythagore
- Chapitre 9 : Les puissances à exposants entiers
- Chapitre 10 : Trigonométrie dans le triangle rectangle

Si vous avez des questions, nous sommes joignables sur les adresses mail suivantes :

- ✓ orsini.math.caillaux@hotmail.com
- ✓ orsini.math.giordano@hotmail.com

Prenez soin de vous et de vos proches !

Chapitre 6 : Factorisation

<u>Définition :</u>

Factoriser correspond à **transformer une somme** (différence) en **un produit de facteurs**.

<u>Ordre de factorisation :</u>

1) <u>Mise en évidence :</u>

$$ax + bx = x \cdot (a + b)$$

Astuce : On utilise la mise en évidence quand TOUS les termes possèdent un(des) facteur(s) commun(s).

Exemples : $12x + 8 = 4 \cdot (3x + 2)$

Dans l'exemple, on observe que les nombres 12 et 8 sont des multiples de 4.

$42a^5 + 18a^3 = 6a^3 \cdot (7a^2 + 3)$

Dans l'exemple :

- 42 et 18 sont des multiples de 6.
- Dans la partie littérale, on prend l'exposant <u>le plus petit</u> -> a^3

2) <u>Binômes conjugués :</u>

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

On utilise les binômes conjugués lorsqu'on a <u>une différence de deux termes au carré.</u>

Exemples : $16x^2 - 49 = (4x - 7)(4x + 7)$

$4 - (x + 1)^2 = (2 - (x + 1))(2 + (x + 1))$

$= (2 - x - 1)(2 + x + 1) = (-x + 1)(x + 3)$

3) <u>Trinômes carrés parfaits :</u>

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

On utilise les trinômes carrés parfaits lorsqu'on a TROIS termes dont DEUX sont des carrés.

Exemple : $9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$ ($3x$ est le carré de $9x^2$)

(5 est le carré de 25)

Termes au carré double produit

4) <u>Division par $(x-a)$ ou la méthode de Horner :</u>

On utilise Horner quand aucune des 3 autres méthodes ne fonctionnent !

Exemple : $A(x) = 3x^2 + 2x - 1 = ?$

Etape 1 : On cherche l'ensemble des diviseurs du terme indépendant $\rightarrow -1$ dans l'exemple

$$div - 1 = \{\pm 1\}$$

Etape 2 : On remplace x dans l'équation par un des diviseurs (soit -1 ou 1). Le but étant d'obtenir 0 !

$$A(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 3 \cdot 1 - 2 - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

➔ $a = -1$

➔ Dans cet exemple, la division par $(x-a)$ est donc $\big(x-(-1)\big) = (\boldsymbol{x+1})$

Etape 3 : Tableau de Horner

Coefficients de $A(x)$	3	2	-1
	+	+	+
$a = -1$	0	$\xrightarrow{\cdot -1}$ -3	$\xrightarrow{\cdot -1}$ 1
	3	-1	0

Coefficients du quotient
➔ $(3x-1)$

Dans la factorisation par Horner, <u>le reste vaut TOUJOURS 0</u> !!

Etape 4 : $3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$

<u>Règle du produit nul :</u>

Comme le dit le titre, il faut obtenir un produit (une multiplication) qui est égal à 0 !
Le but de ces exercices est de trouver la(les) valeur(s) que prend(prennent) l'inconnue x.

$$\boxed{a \cdot b = 0 \ \rightarrow a = 0 \ ou \ b = 0}$$

1) On transforme l'équation afin qu'elle soit nulle
2) On factorise, si possible, au maximum (afin d'obtenir un produit)
3) On applique la règle du produit nul (voir encadré)
4) On résout séparément chaque équation obtenue
5) On écrit la(les) solutions

Exemple 1 : $(x+3)(2x-1) = 0$

$x + 3 = 0 \quad ou \quad 2x - 1 = 0$ (les deux facteurs sont égaux à 0)

$x = -3 \quad ou \quad 2x = 1$ (on résout les équations)

$x = -3 \quad ou \quad x = \frac{1}{2}$

$S = \{-3\,;\frac{1}{2}\}$ (on écrit la(les) solution(s))

Exemple 2 :	$x^3 = 16x$	
	$x^3 - 16x = 0$	(équation nulle)
	$x(x^2 - 16) = 0$	(on factorise – mise en évidence)
	$x(x-4)(x+4) = 0$	(on factorise – binômes conjugués)
	$x = 0 \quad ou \quad x - 4 = 0 \quad ou \quad x + 4 = 0$	(on applique la règle du produit nul)
	$x = 0 \quad ou \quad x = 4 \qquad ou \quad x = -4$	(on résout les équations)
	$S = \{0\,; 4\,;\, -4\}$	(on écrit les solutions)

Chapitre 7 : Les radicaux

Définition :

La racine carrée positive d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif x dont le carré vaut a.

$$\sqrt{a} = x \leftrightarrow x^2 = a \qquad \text{avec } x \geq 0$$

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$

$\sqrt{64} = 8$ car $8^2 = 64$

$\sqrt{1{,}21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1{,}1$

Remarque :

Un nombre strictement négatif **n'admet pas** de racine carrée réelle !!!

Nombres carrés parfaits :

Un nombre carré parfait est un nombre dont sa racine carrée est exacte !! (entière ou non entière)

Exemples : 16 est un nombre carré parfait car $\sqrt{16} = 4$

35 n'est pas un nombre carré parfait $\sqrt{35} = ?$

Liste des nombres carrés parfaits :

1 – 4 – 9 – 16 – 25 – 36 – 49 – 64 – 81 – 100 – 121 – 144 – 169 – 196 – 225 - …

Encadrer une racine carrée :

Dans certains cas, on ne peut pas trouver la valeur exacte de la racine carrée.

Dans ce cas, on peut en donner **une valeur approchée.**

Exemple : $\sqrt{11} = ?$

Pour encadrer, on va utiliser les nombres carrés parfaits :

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

Propriétés des racines carrées :

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Simplification de racines carrées :

Pour simplifier des racines carrées, il faut **transformer en un produit dont un des facteurs est un nombre carré parfait** (le plus grand possible).

Si on place une **partie littérale** dans la racine carrée :

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n \qquad \text{(on divise l'exposant par 2)}$$

Remarque :

Attention ! L'exposant doit être un nombre pair :

$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = a^3\sqrt{a}$

Exemples : $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{72a^3b^2} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2} = 6ab\sqrt{2a}$

Si le radicant est **très grand** ! Alors, on peut utiliser la **décomposition en facteurs premiers.**

Exemple : $\sqrt{250} = \sqrt{2 \cdot 5^3} = \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot 5} = 5\sqrt{10}$

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction :

Si le dénominateur de la fraction est un monôme contenant une racine carrée, on **multiplie les deux termes de la fraction par la racine carrée du dénominateur.**

Exemples : $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

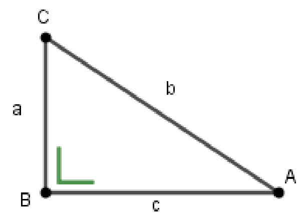
$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Chapitre 8 : Pythagore

Théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit.

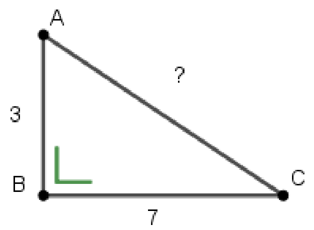
$b^2 = a^2 + c^2$ ou $|AC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$



Remarques : Dans un triangle rectangle, **l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.**

Dans le **théorème de Pythagore**, on sait que le **triangle est rectangle** et on **recherche la mesure d'un côté !**

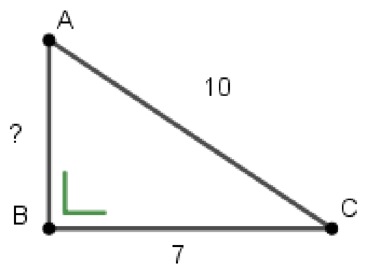
Exemples :



$|AC|^2 = 3^2 + 7^2$

$|AC|^2 = 9 + 49 = 58$

$|AC| = \sqrt{58} = 7{,}616$



$10^2 = 7^2 + |AB|^2$

$100 = 49 + |AB|^2$

$100 - 49 = |AB|^2$

$51 = |AB|^2$

$\sqrt{51} = |AB|$

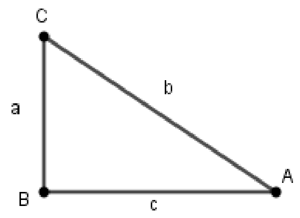
$7{,}141 = |AB|$

Réciproque et contraposée du théorème de Pythagore :

Réciproque :

Si dans un triangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle, alors le triangle est rectangle

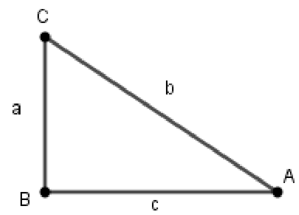
Si $b^2 = a^2 + c^2$ alors, ABC est rectangle



Contraposée :

Si dans un triangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse n'est pas égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle, alors le triangle est rectangle

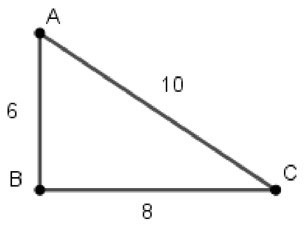
Si $b^2 \neq a^2 + c^2$ alors, ABC n'est pas rectangle



Remarques : Dans la **réciproque**, on **connaît tous les côtés** et on trouve que **le triangle est rectangle.**

Dans la **contraposée**, on **connaît tous les côtés** et on trouve que **le triangle n'est pas rectangle.**

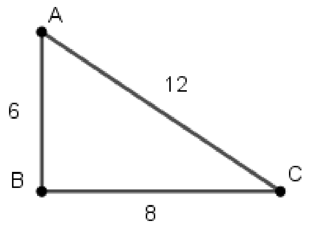
Exemples :



$10^2 \stackrel{?}{=} 8^2 + 6^2$

$100 \stackrel{?}{=} 64 + 36$

$100 = 100$ Donc, le triangle est rectangle en B (par la réciproque)



$12^2 \stackrel{?}{=} 8^2 + 6^2$

$144 \stackrel{?}{=} 64 + 36$

$144 \neq 100$ Donc, le triangle n'est pas rectangle (par la contraposée)

Distance entre deux points :

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

On soustrait les abscisses On soustrait les ordonnées

Exemple :

$A(-1; 5)$ et $B(-4\,;\,-8)$:

$$|AB| = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (5-(-8))^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (5+8)^2} = \sqrt{3^2 + 13^2} = \sqrt{9+169} = \sqrt{178}$$

Chapitre 9 : Les puissances à exposants entiers

Définition d'une puissance :

Si a est un nombre réel et n un nombre naturel différent de 0 et de 1, alors a^n est le produit de n facteurs égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

Cas particuliers :

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

Formule d'une puissance à exposant entier :

Si a est un nombre réel non nul et n un nombre naturel,
alors, a^{-n} est **l'inverse** de a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriétés de puissances à exposants entiers :

Si $a \in R$ et $m, n \in Z$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Si $a \in R$ et $m, n \in Z$:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Si $a \in R$, $b \in R$ et $m \in Z$:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Si $a \in R$, $b \in R_0$ et $m \in Z$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Si $a \in R$, $b \in R_0$ et $m, n \in Z$:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Notation scientifique :

Un nombre en **notation scientifique** est un nombre écrit sous la forme d'un produit de deux facteurs :

- le **premier facteur** est un nombre décimal a tel que $\mathbf{1 \leq a < 10}$
- le **deuxième facteur est une puissance de 10**

Remarques : Si on transforme un **très petit nombre** en notation scientifique, l'exposant de la puissance de 10 est **négatif.**

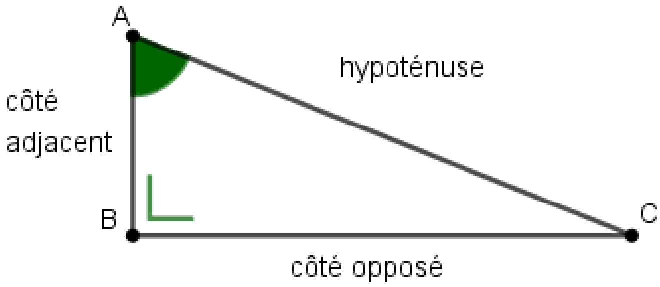
Si on transforme un **très grand nombre** en notation scientifique, l'exposant de la puissance de 10 est **positif.**

Exemples : $10\,274 = 1{,}027\,4 \cdot 10^4$

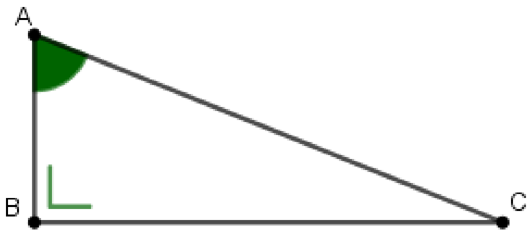
$0{,}000\,057\,6 = 5{,}76 \cdot 10^{-5}$

Chapitre 10 : Trigonométrie dans le triangle rectangle

Rappel :



Formules des nombres trigonométriques : SOH CAH TOA



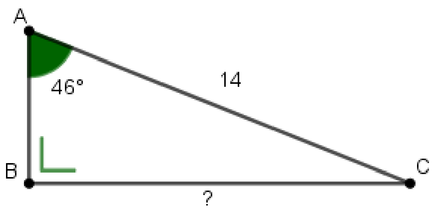
$$sin\ \hat{A} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$cos\ \hat{A} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$tan\ \hat{A} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

Manipulation de la calculatrice + étapes de calcul :

1) Si on recherche la **longueur d'un côté :**



Dans le triangle ci-contre, on recherche le côté [BC].

Etape 1 : Quelle(s) donnée(s) connaît-on ?

On connaît l'angle $\hat{A}$ et on connait le côté [AC].

- ➔ Par rapport à l'angle $\hat{A}$, on connait le **côté hypoténuse (H)** et on recherche le **côté opposé (O)**
- ➔ Dans SOH CAH TOA, on s'intéresse à la syllabe SOH, c'est-à-dire SINUS

Etape 2 : On résout la formule du nombre trigonométrique observé.

$\sin 46° = \frac{x}{14}$ (x correspond au côté opposé et 14 correspond à l'hypoténuse)

$\frac{\sin 46°}{1} \quad \frac{x}{14}$ (Pour isoler x, on utilise le produit en « croix »)

$x = 14 \cdot \sin 46°$ (On calcule $\boxed{14 \times \sin(46)}$ à la calculatrice)

$x = 12{,}625$

2) Si on recherche **l'amplitude d'un angle.**

Dans le triangle ci-contre, on recherche l'angle Â.

Etape 1 : Quelle(s) donnée(s) connaît-on ?

On connaît le côté [BC] et le côté [AB]

- ➔ Par rapport à l'angle Â, on connait le **côté opposé (O)** et on recherche le **côté adjacent (A)**
- ➔ Dans SOH CAH TOA, on s'intéresse à la syllabe TOA, c'est-à-dire TANGENTE

Etape 2 : On résout la formule du nombre trigonométrique observé.

$\tan \hat{A} = \frac{35}{10}$ (35 correspond au côté opposé et 10 correspond au côté adjacent)

SHIFT tan(35 : 10) (Pour isoler Â, il faut enlever le « TAN ». Pour se faire on appuie à la calculatrice sur la touche SHIFT (ou 2^{nde}))

$\hat{A} = 74{,}05°$