Mathématiques - Trigonométrie 5AS UAA5
Prof : EL FANI A.   30 Mars 2020

Synthèse de formules

1. Relation fondamentale :

$1 = \cos^2 a + \sin^2 a$

2. Formules d'addition :

$\cos (a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

$\tan (a - b) = (\tan a - \tan b) / (1 - \tan a \tan b)$

3. Formules de duplication :

Les formules de duplication ne sont que des cas particuliers des formules d'addition.

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$

$\tan 2a = 2 \tan a / (1 - \tan^2 a)$

4. Formules de Carnot/de linéarisation

$\text{Cos}^2 a = ½ (1 + \cos 2a).$

$\text{Sin}^2 a = ½ (1 - \cos 2a).$

5. Formules de Simpson

cos p + cos q = 2 cos (p + q)/2cos(p – q)/2

cos p - cos q = - 2 sin(p + q)/2sin(p – q)/2

sin p + sin q = 2 sin(p + q)/2cos(p – q)/2

sin p - sin q = 2 cos(p + q)/2sin(p – q)/2

Equations trigonométriques

Solutions principales : ce sont l'ensemble des solutions comprises dans [0 ; 2 π [.

Puis, il faudra à chaque fois représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

1) Forme cos x = cos a

Deux angles de même cosinus :

- Les angles équivalents
- Les angles opposés

(Naturellement à des multiples de 2 π près).

Les deux solutions sont alors données par :

x = a + 2k π ou x = - a + 2k π ; k € Z

2) Forme sin x = sin a

Deux angles de même sinus :

- Les angles équivalents
- Les angles supplémentaires

(Naturellement à des multiples de 2 π près.

Les deux solutions sont alors données par

x = a + 2k π ou x = (π – a) + 2k π , k € Z

3) Forme tan x = tan a

Deux angles de même tangentes :

- Les angles équivalents
- Les angles anti supplémentaires

(Naturellement à des multiples de π près.

Attention à ne pas oublier la condition d'existence : x ≠ π/2 + k π , k € Z

Les solutions sont alors données par :

x = a + k π, k € Z.

Exercices

Exercice n°1

Calculez les expressions demandées :

1. $\cos\frac{\pi}{7}\ \cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{7}\ \ \sin\frac{\pi}{5}$

2. sin (60°) cos (15°) + sin (15°) cos (60°)

3. cos (130°) cos (40°) + sin (40°) sin (130°)

4. cos (3x) cos (2y) - sin (3x) sin (2y)

Exercice n°2

Montrez que pour tout réel x, on a :

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x$

2. $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin x$

3. $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}$

4. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

Exercice n°3

Sans calculer a et b eux-mêmes, déterminez :

sin(a + b);   sin(a - b);   cos(a + b);   cos(a - b);   tan(a + b);   tan(a - b) si :

1. a € II$^{\text{ème}}$ Q,   b € III$^{\text{ème}}$ Q, sin a = $\frac{12}{13}$ et cos b = $-\frac{4}{5}$

2. a € III$^{\text{ème}}$ Q,   b € IV$^{\text{ème}}$ Q, sin a = $-\frac{1}{2}$ et cos b = $\frac{1}{3}$

3. a € I$^{\text{ème}}$ Q,   b € IV$^{\text{ème}}$ Q, sin a = $\frac{1}{2}$ et cos b = $\frac{5}{13}$

Exercice n°4

Utilisez les formules de Simpson pour simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2. $10\cos(75°)\cos(15°)$

3. $\sin(3x)\sin(5x)$

4. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

5. $\cos(2x)\cos(4x)$

Exercice n°5

Utilisez les formules de Simpson afin de factoriser les expressions suivantes :

1. $\sin(3\theta) + \sin(\theta)$

2. $\cos(6x) + \cos(2x)$

3. $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

4. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

5. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice n°6

Vérifiez les identités trigonométriques suivantes :

1. $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

2. $\cos(a + b)\sin(a - b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b$

3. $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

4. $(\cos a - \sin a)(\cos b - \sin b) = \cos(a - b) - \sin(a + b)$